Démontrer

Qu'est-ce qu'une démonstration ?
Comment démontre-t-on ? Un collégien, un lycéen peut-il démontrer ? Doit-il démontrer ?

(Je penserais plutôt : peut-il ne pas démontrer ? Mais c'est là un autre sujet, dont j'espère parler très prochainement... Et longuement !)

Au bout de ces (nombreuses) années d'enseignement, à me poser des questions quasiment chaque jour, j'ai tout de même acquis une certitude – ce qui n'en fait pas pour autant une vérité :

tous les collégiens et tous les lycéens peuvent *participer* à des démonstrations.
(Et ce serait bien qu'ils puissent le faire !)

Tout doucettement au début, en sixième et en cinquième, un petit truc de temps en temps, des démonstrations très simples, des raisonnements à un seul chaînon.

Pour prendre goût aux maths.
Pour découvrir peu à peu que les maths, c'est ça, et non pas un ensemble insipide de recettes.
Pour découvrir également que,
quelle que soit la langue qu'ils parlent chez eux, quel que soit « leur milieu », là, ils n'ont pas de handicap.

Et puis en quatrième, en troisième, au lycée, ils devraient *participer* à des démonstrations un peu plus coriaces.

Pour le frisson de la découverte, du moment où « tout bascule ».

(Mon ami Mathieu me racontait récemment que, lorsqu'il était en « Maths-Sup », il reproduisait en « kholle » les démonstrations qu'il avait apprises – jusqu'au soir où un «kholleur » lui avait dit : « c'est bien, toutefois c'est dommage d'avoir appris la démonstration par cœur ». Mais il lui avait encore fallu attendre quelques années avant qu'un prof d'université lui confie un des secrets de la démonstration : repérer le point où tout bascule... Le reste n'est qu'intendance !)

Participer, pas subir !

Pour retenir une démonstration, il est préférable d'en avoir la motivation... Le désir - et ce désir est bien plus facile à stimuler chez des acteurs volontaires que chez des spectateurs passifs : une démonstration ne se retient pas plus dans le vide qu'une langue étrangère ne s'apprend juste pour l'apprendre.

Mais comment faire participer nos élèves à une démonstration ?
Je n'ai évidemment aucune recette magique à vous proposer. Nous sommes tous différents, et nos élèves diffèrent d'une année à l'autre, d'une classe à l'autre. L'idée générale serait de les intégrer à la construction des maillons qui précèdent le « moment magique » : celui qui déclenche le cœur de la démonstration.

Bon, plutôt que de longuement discourir, voici, à titre d'exemple, comment nous avons travaillé sur le théorème de Pythagore, en quatrième, l'an dernier. Permettez-moi d'insister : il s'agit d'un exemple d'un travail personnel, en aucun cas d'un modèle à suivre. Je l'ai déjà dit, je le redirai de nombreuses fois : je suis contre la pensée unique !

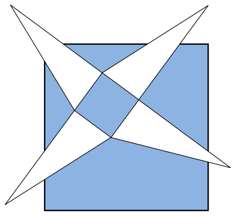
Une approche du théorème de Pythagore, en quatrième.

Avant d'en arriver à la démonstration proprement dite, il nous a fallu presque trois séances d'introduction : le théorème de Pythagore n'est pas descendu, un soir, d'un nuage, dans un désert.
Mais le thème de cet article est « la démonstration », donc, pour ces séances d'introduction, permettez-moi de vous renvoyer aux deux premières pages de synthèse du cours que j'ai par la suite distribuées aux élèves de la classe.
Elles sont ici : ébauche, servez-vous (en cliquant sur « Synthèse des séances à la découverte du théorème de Pythagore »).

Participer à la démonstration :

Lorsqu'après avoir fait dessiner à mes élèves, sur leur cahier, un carré de 15 cm de côté,
après leur avoir demandé de le « barbouiller » rapidement en bleu,
après avoir demandé à chacun d'entre eux de choisir un couple d'entier (a,b) dont la somme vaut 150,
après leur avoir fait découper quatre triangles rectangles de « petits côtés » a et b , en mm, dans des feuilles blanches...

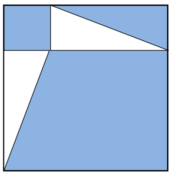
Lorsque donc, après tout ça, je leur demande de faire apparaître, avec leurs triangles en carton, un morceau de bleu associé à a^2, lorsqu'ils réfléchissent, s'énervent, et finalement trouvent ceci :

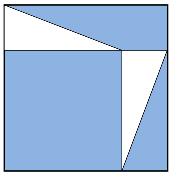


Lorsque ensuite, je leur demande la même chose avec b^2,
puis avec c^2… En appelant c la longueur - qu'ils ne mesurent pas - du « grand » côté.

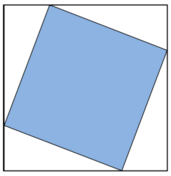
Lorsque, tout fiers, ils manipulent leurs bouts de carton comme des pros, puis qu'ils se rendent compte - qu'ils croient se rendre compte - que je les « amuse », s'énervent à nouveau, me demandent des comptes...

Lorsque je me moque gentiment d'eux, lorsque je leur impose maintenant de ne pas laisser leurs cartons sortir du carré bleu (là, je leur ai raconté une histoire idiote de piscine carrée dans laquelle on voulait installer des flotteurs en forme de triangles rectangles), lorsqu'ils découvrent qu'ils peuvent construire un a^2 associé à du bleu, avec seulement deux cartons, puis pareil avec b^2 :

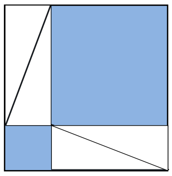




lorsqu'ils arrivent à la seule configuration possible
(à une symétrie près), en une pièce et en bleu, de c^2 :



Et lorsqu'enfin, je leur demande une configuration unique faisant apparaître un a^2 ET un b^2,
cette fois-ci avec les quatre cartons...



Lorsqu'au bord de la crise de nerfs, ils finissent par y arriver,
lorsque toute la classe s'en prend à moi, avec des envies de meurtre à peine contrôlées...

Lorsqu'ils piaillent que tout ça, c'est très amusant, mais qu'on perd son temps,
et quand est-ce qu'on « démontre Pythagore »...

Lorsque je leur dis avec un grand sourire innocent : « mais vous venez de le démontrer ! »…

Là, c'est là, que tout bascule. C'est là que le moment magique apparaît.
Qu'ils s'énervent, réfléchissent… Et finalement comprennent ! Dans un brouhaha merveilleux, des sourires radieux.

C'est beau ☺

Naturellement, et je l'ai dit plus haut, il y a avant : une compilation de triangles rectangles tous différents et une observation en trois colonnes - qui rappelle à mes ex-élèves de cinquième ce qu'ils ont fait pour débusquer Pi... Mais il y a également après : les limites de cette démonstration (et là, je vous renvoie, si vous le voulez bien, à un article précédent sur « l'architecture du théorème de Pythagore » - mais vous pouvez également, tout simplement, cliquer sur le lien correspondant, dans la page des « ébauches »), puis ses applications !

Un beau moment d'enseignement... Mais également, un moment efficace : en mai, la majorité de la classe se rappelait comment démontrer ce théorème.

Enfin, et juste pour le plaisir, vous trouverez, page suivante, une photo d'une des pages du cahier d'une élève remarquable... Remarquable en ce que, de retour chez elle, elle déformait à son goût quelques passages de mon cours - et le résultat était souvent rafraîchissant !
Au nom de quoi l'aurais-je contrainte, en 4ème, à un résumé plus rigide d'un cours dont elle maîtrisait l'essence ?

Le 04/02/2014
Pour le 05/02/2014

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

La dernière fois, on a rassemblé toutes les mesures des différents côtés des triangles rectangle que chacun a fait. Le « a » était la plus petite longueur, « b » celle du milieu, et « c », la plus grande, donc l'hypothénuse.

Nous commençons par chercher à établir des rapports avec a,b,c. Nous devons trouver c à partir de a et b. Mais il n'y a pas de choses crédibles donc on essaye autre chose.

a	b	c
4	8	9
5	9	10
3,2	4	5,2

NBU: La racine carrée de 64, c'est 8 parce que $8 \times 8 = 64$
Soit $8^2 = 64$

Maintenant, on regarde le même tableau mais avec la ~~[illegible]~~ carrée. Comme [illegible] la racine carrée, la marge d'erreur est plus grande. Dans le premier tableau, on constate que $a \times a + b \times b \approx c \times c$. Pour vérifier, on refait un tableau (le deuxième) mais on transforme les décimaux en entiers. On constate mieux que $a \times a + b \times b \approx c \times c$.

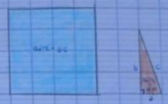
a×a	b×b	c×c
16	64	81
25	81	100
10,24	16	27,04

a×a	b×b	c×c
16	64	81
25	81	100
10	16	27

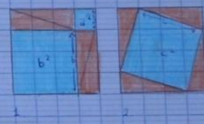
Conclusion: Il semblerait que la formule du théorème de Pythagore soit : $a \times a + b \times b = c \times c$. Soit $a^2 + b^2 = c^2$

Le 05/02/2014
Pour le 06/02/2014

Le marquis de Courbevoie veut faire construire une piscine carrée à l'intérieur du collège Georges Pompidou. Mais il veut aussi y mettre les quatres triangles en plastique ci-dessus en mémoire de tous les professeurs de maths qui sont partis du collège.



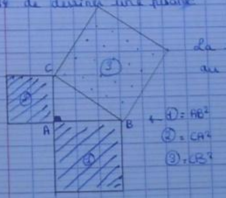
Si on veut trouver combien de place restera pour nager, on fait :
aire libre = [illegible] - 4at



Le marquis hésite entre ces deux structures mais les professeurs de sport veulent que le bassin soit grand, donc le 2 et trouvent qu'il y a moins d'espace dans le 1.
Le marquis leur dit :
al = [illegible] - 4 at donc al est la même chose des deux possibilités
cela veut dire que $a^2 + b^2 = c^2$!
Les professeurs sont soulagés d'avoir compris que ce serait la même chose et le marquis choisit finalement de faire construire deux piscines.

Le 06/02/2014
Pour le 07/02/2014

Pour démontrer le théorème de Pythagore, on n'est pas obligé de dessiner une piscine.



La somme des deux carrés rayés est égale au carré n° 3.

① = AB^2
② = CA^2
③ = CB^2

Si ABC est un rectangle en A, alors
$AB^2 + AC^2 = CB^2$