Aire d'un triangle :

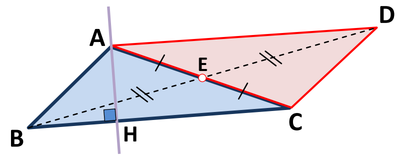
Maintenant que tu sais (presque) tout sur les hauteurs d'un triangle, déterminer l'aire d'un triangle va devenir un jeu d'enfant !

T-150 L'aire d'un triangle est le demi-produit d'un côté de ce triangle par la hauteur associée à ce côté.

(... ***De la longueur*** d'un côté... Bon, je n'insiste pas !)

Démonstration :

soit un triangle ABC.
J'appelle E le milieu de [AC],
D le symétrique de B par rapport à E
et H le pied, sur (BC), de la hauteur à ABC, issue de A.



D'après D-69, E est le milieu de [BD], donc, **d'après T-104**, ABCD est un parallélogramme, et **d'après T-136**, son aire est le produit de BC par AH.

Mais dans la symétrie de centre E, **d'après D-69**, l'image de A est C, donc, **d'après T-10**, AB = CD et BC = AD. Alors, comme AC = CA, ABC et CDA sont deux triangles isométriques : ils ont alors la même aire... Et comme ils sont adjacents, la somme de leurs aires est l'aire de ABCD.

L'aire de chacun d'eux - et en particulier l'aire de ABC - est donc bien la moitié de celle de ABCD, c'est-à-dire le demi-produit de BC par AH !

En t'appuyant sur une symétrie dont le centre serait le milieu de [AB], puis sur une symétrie dont le centre serait le milieu de [BC], tu démontrerais de la même façon que l'aire de ABC est également le demi-produit de AC par la hauteur issue de B, puis le demi-produit de AB par la hauteur issue de C... Ce qui termine la démonstration de ce théorème !

Peut-être est-ce le moment de te rappeler le cas particulier du triangle rectangle, que j'avais anticipé - et démontré - à propos de l'aire d'un parallélogramme :

T-134 L'aire d'un triangle rectangle est le demi-produit de ses côtés perpendiculaires.

(La démonstration en est page 192 !)

Voilà : j'ai passé en revue avec toi un certain nombre de lignes particulières associées aux triangles. J'aimerais maintenant observer quelques situations particulières... A l'origine de deux théorèmes célèbres !

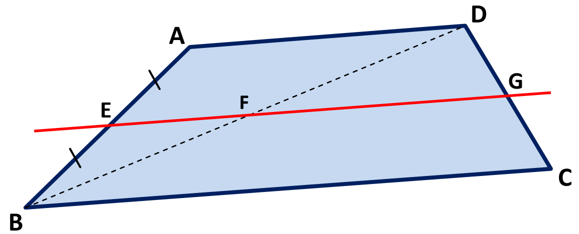
A la découverte du « théorème de Thalès » :

Il existe plusieurs versions de ce théorème, et, pour ne rien simplifier, plusieurs démonstrations de chacune de ces versions ! J'espère que tu ne m'en voudras pas : je ne mentionnerai ici que deux de ces versions - et tout de même deux formes de la seconde version !

Mais chaque chose en son temps : partons, avec l'aide d'un théorème intermédiaire, à la conquête de la première version.

T-151 Si une droite, parallèle aux bases d'un trapèze, passe par le milieu d'un troisième côté de ce trapèze, alors cette droite passe par le milieu du quatrième côté.

Démonstration :



soit un trapèze ABCD, de bases [AD] et [BC].
J'appelle E le milieu de [AB],
F le point commun à (BD)
et à la droite parallèle à (BC), passant par E,
et enfin G le point commun (EF) et à (CD).

Observe ABD et (EF) :

E est le milieu de [AB] et (EF) est parallèle à (AD) (**d'après M-9**), donc, **d'après T-140**, F est le milieu de [BD].

Observe maintenant BCD et (FG) :

F est le milieu de [BD] et (FG) est parallèle à (BC), donc, toujours **d'après T-140**, G est bien le milieu de [CD].

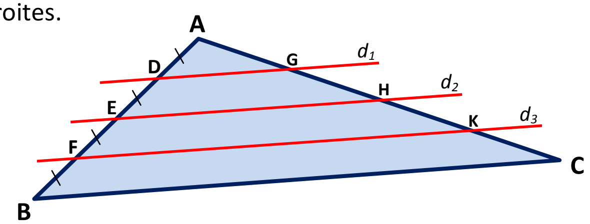
Ce théorème va bien entendu me servir à démontrer le suivant :

T-152 **<u>« théorème de Thalès », première version</u> :**

si un ensemble de droites, toutes parallèles à un même côté d'un triangle, sépare un deuxième côté de ce triangle en des segments de même longueur, alors cet ensemble de droites sépare également le troisième côté en des segments de même longueur (différente, en général, de celle des premiers segments).

Démonstration :

pour commencer, un exemple avec trois droites.



Soient un triangle ABC
et trois droites, d_1, d_2 et d_3,
coupant [AB] respectivement en D, E et F,
parallèles à (BC)
et telles que AD = DE = EF = FB.

J'appelle G le point commun à d_1 et à [AC] (**d'après M-16**, d_1, qui ne coupe pas [BC], coupe [AC]),
H le point commun à d_2 et à [AC], et K celui commun à d_3 et à [AC].

Observe AEH et (DG) :

D est le milieu de [AE] et (DG) est parallèle à (EH) (**d'après M-9**), donc, **d'après T-140**, G est le milieu de [AH] : AG = GH.

Observe maintenant DFKG et (EH) :

d'après D-115, DFKG est un trapèze.
E est le milieu de [DF] et (EH) est parallèle à (FK) (**d'après M-9**), donc, **d'après T-151**, H est le milieu de [GK] : GH = HK.

Observe enfin EBCH et (FK) :

d'après D-115, EBCH est un trapèze.
F est le milieu de [EB], (FK) est parallèle à (BC), donc, **d'après T-151**, K est le milieu de [HC] : HK = KC.

Tu viens de démontrer que AG = GH = HK = KC !

Et si ce ne sont pas trois droites qui coupent [AB] ?

Si [AB] n'est coupé que par une droite, tu reviens à T-140 ;

si [AB] est coupé par deux droites, considère que dans l'exemple précédent, les points B et C sont en réalité les points que j'ai appelés F et K !

Et si [AB] est coupé par plus de trois droites, il te suffit de répéter l'étape « trapèze » autant de fois que nécessaire pour atteindre finalement [BC], en avançant à chaque fois d'un segment de plus sur [AB] … Et en utilisant à chaque fois T-151 !

Et voici maintenant une forme simplifiée de la deuxième version du « théorème de Thalès ». La forme finale du théorème suivra de près : ce n'est qu'une légère extension de la forme simplifiée !

La première et la deuxième version du théorème sont deux théorèmes différents, bien que voisins, qui correspondent à une évolution de la pédagogie, en France... Et sont eux-mêmes différents de ce qui est appelé « théorème de Thalès » dans d'autres pays !

T-153 « Théorème de Thalès », deuxième version, forme simplifiée :

soient un triangle ABC (non dégénéré), un point D de [AB] et un point E de [AC].

Si (DE) est parallèle à (BC), alors les trois rapports $\frac{\text{AD}}{\text{AB}}$, $\frac{\text{AE}}{\text{AC}}$ et $\frac{\text{DE}}{\text{BC}}$ sont égaux.

Démonstration :

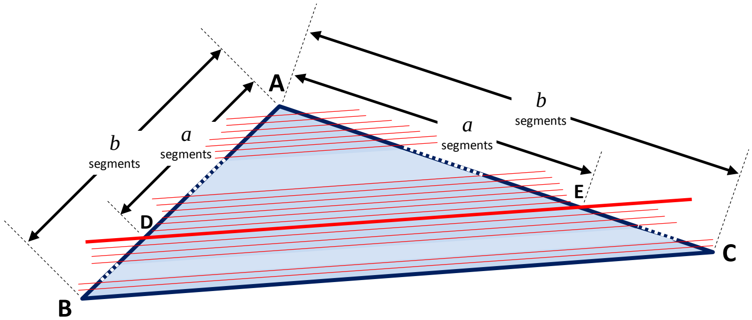
Je vais devoir la séparer en deux parties... Et la deuxième partie ne sera, hélas, qu'ébauchée !

Première partie : je suppose que AD est une fraction de AB.

J'appelle alors a et b deux nombres entiers positifs tels que $\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{a}{b}$.

(AB n'est pas nul, puisque ABC est un triangle, et a est inférieur à b, puisque AD est inférieur à AB.)

Il te suffit alors d'imaginer que tu as séparé [AB] en b segments d'une même longueur, que je vais appeler longueur ℓ_1, par des droites parallèles à (BC) :



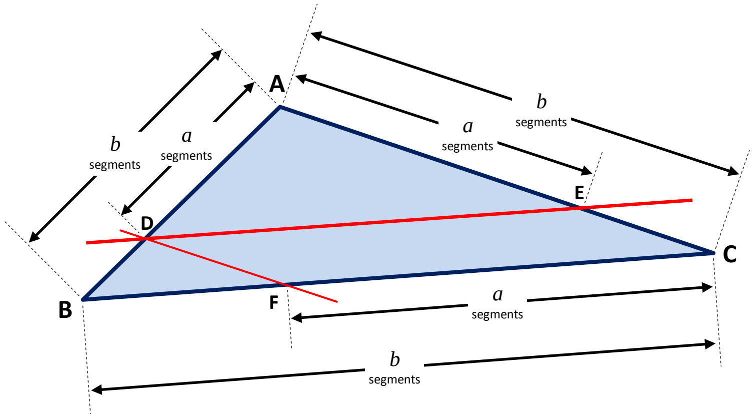
$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{a}{b}$ signifie alors que [AD] est formé de a segments de longueur ℓ_1.

Mais **d'après T-152**, ces droites séparent également [AC] en b segments d'une même longueur, que j'appelle longueur ℓ_2, dont les a premiers (en partant de A) forment [AE] :

alors $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{a}{b}$ ... Donc $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$!

Il me reste à prouver que $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB}$:

J'appelle F le point commun à [BC] et à la droite qui passe par D et qui est parallèle à (AC). Imagine maintenant l'ensemble des droites parallèles à (AC) et passant par les extrémités des segments de longueur ℓ_1 qui séparent [AB] : en appliquant exactement le même raisonnement que pour [AC], tu démontres que ces droites séparent [BC] en b segments d'une même longueur, que j'appelle longueur ℓ_3 ... Et [FC] en a segments de longueur ℓ_3 !



Alors $\dfrac{FC}{BC} = \dfrac{a}{b}$. Mais (DE) est parallèle à (FC), (DF) est parallèle à (EC), donc, **d'après D-120**, DFCE est un parallélogramme... Et **d'après T-105**, DE = FC. Donc finalement, $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{a}{b}$:

T-153 est bien démontré dans le cas où AD est une fraction de AB !

Deuxième partie : je suppose que AD n'est pas une fraction de AB.

Cela signifie que, même si je sépare [AB] en 1 milliard de segments de même longueur (une longueur vraiment très petite), aucun de ces segments n'aura D comme extrémité !
($\frac{AD}{AB}$ est alors ce que les mathématiciens appellent un « nombre irrationnel ».)
Mais si je sépare [AB] en un nombre immense de segments de même longueur (une longueur « immensément petite »), une extrémité de l'un de ces segments sera « immensément proche » de D : si j'appelle T cette extrémité, cela signifie que AT sera « immensément proche » de AD, et donc que $\frac{AD}{AB}$ sera « immensément proche » de la fraction $\frac{AT}{AB}$. Cet « immensément proche » ne dépend que du nombre des segments qui séparent [AB] : rien ne m'empêche d'imaginer, par exemple, que je sépare [AB] en 1 milliard de milliards de segments. Et que la fraction $\frac{AT}{AB}$ devient alors tellement proche du nombre irrationnel $\frac{AD}{AB}$ … Que je vais « faire comme si » $\frac{AD}{AB}$ <u>était</u> la fraction $\frac{AT}{AB}$, et revenir au raisonnement de la première partie !

Je sais bien que cette explication est un peu... Limite ☺ ! J'en suis désolé : comme je te l'avais déjà écrit à propos des longueurs, raisonner sur des nombres irrationnels n'a malheureusement pas sa place dans ce livre !

Il existe d'autres démonstrations de T-152 et de T-153. Euclide lui-même en avait conçu une, pour un théorème proche de T-152, en s'appuyant sur les aires de trois triangles. Mais aucune ne peut contourner l'existence des nombres irrationnels : les aires, en particulier, sont déterminées à l'aide de théorèmes qui utilisent des longueurs, que je ne t'ai réellement définies que pour des nombres-fractions (ceux que les mathématiciens appellent des « nombres rationnels » - et qui incluent également les entiers et les décimaux).

Bon, l'aspect un peu « troué » - pour cause d'irrationnels - de la démonstration de T-153 ne doit pas nous empêcher d'avancer, n'est-ce pas ? Alors voici maintenant la forme finale de la version actuelle, en France, du « théorème de Thalès » :

T-154 **<u>« Théorème de Thalès »</u> :**

soient cinq points distincts, A, B, C,D et E, tels que (BD) et (CE) soient sécantes en A.
Si (BC) et (DE) sont parallèles, alors les rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$ et $\frac{DE}{BC}$ sont égaux.

Démonstration :

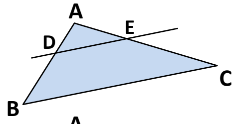
je dois étudier trois configurations possibles.

Première configuration : A n'appartient ni à [BD], ni à [CE].

Si (BC) et (DE) sont parallèles, D et E sont du même côté de (BC), ce qui laisse deux possibilités :

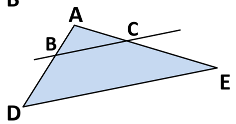
ou bien A est du même côté de (BC) que D et E :

D appartient alors à [AB], E appartient à [AC],
et je retrouve exactement T-153 !



ou bien A est de l'autre côté de (BC) :

alors, c'est B qui appartient à [AD]
et C qui appartient à [AE]…



Et **d'après T-153**, les rapports $\frac{AB}{AD}$, $\frac{AC}{AE}$ et $\frac{BC}{DE}$ sont égaux.

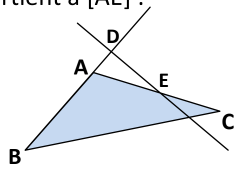
Mais (**d'après** l'énoncé) aucun des nombres AB, AC ou BC n'est nul, donc chacun des rapports précédents a un inverse, et ces trois inverses sont égaux : les rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$ et $\frac{DE}{BC}$ sont bien égaux.

Deuxième configuration : A appartient à [BD] mais pas à [CE].

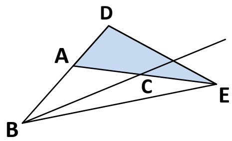
(*Ou* : A appartient à [CE] mais pas à [BD])

Si A appartient à [BD], D n'appartient pas à [AB] et B n'appartient pas à [AD].

Si A n'appartient pas à [CE], soit E appartient à [AC], soit C appartient à [AE] :



si E appartient à [AC], (DE) coupe [AC] en E ;
mais puisque D n'appartient pas à [AB],
(DE) ne coupe pas [AB].
Alors, **d'après M-16**, (DE) coupe [BC] :
(BC) et (DE) ne peuvent donc pas être parallèles !



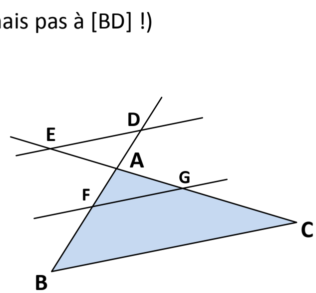
Si C appartient à [AE], (BC) coupe [AE] en C ;
mais puisque B n'appartient pas à [AD],
(BC) ne coupe pas [AB].
Alors, **d'après M-16**, (BC) coupe [DE] :
(BC) et (DE) ne peuvent toujours pas être parallèles !

Dans les deux cas de cette configuration, nous sommes donc « hors sujet » !

(Le raisonnement est évidemment le même si A appartient à [CE] mais pas à [BD] !)

Troisième configuration : A appartient à [BD] et à [CE].

J'observe alors la symétrie de centre A. Dans cette symétrie :



D'après T-21, A est invariant.
J'appelle F l'image de D et G celle de E.
(FG) est l'image de (DE),
donc, **d'après T-24**, (FG) et (DE) sont parallèles.

A est un point de (AB),
donc, **d'après T-23**, (AB) est globalement invariante... Donc F est un point de (AB).
A est un point de (EC), donc pour les mêmes raisons, G est un point de (AC).

Puisque A appartient à [BD], B et D sont de part et d'autre de A, et puisque, **d'après D-69**, A est le milieu de [DF], F et D sont également de part et d'autre de A... Donc F et B sont d'un même côté de A : A n'appartient pas à [FB].
Pour des raisons similaires, A n'appartient pas non plus à [GC].

Je reviens alors, cette fois-ci avec les points A, B, C, F et G, à l'une des deux premières configurations. Mais si (BC) est parallèle à (DE), elle est, **d'après M-9**, parallèle à (FG) : la deuxième configuration est à nouveau « hors sujet ».

Si (BC) est parallèle à (DE), il ne me reste donc que la première configuration :
les rapports $\frac{AF}{AB}$, $\frac{AG}{AC}$ et $\frac{FG}{BC}$ sont alors égaux. Mais **d'après T-11**, AF = AD, AG = AE et FG = DE : les rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$ et $\frac{DE}{BC}$ sont donc bien égaux !

Voilà pour le « théorème de Thalès » lui-même... J'espère que tu ne m'en voudras pas trop si je l'accompagne de deux autres théorèmes, dont tout logicien te dira - avec raison - que le premier est inutile, et dont le second est souvent anobli d'un nom qu'il ne mérite pas !

Oh, M'sieur, je vous en veux pas souvent !
Et puis c'est vrai que là,
on fait de belles démonstrations !

Merci encore !
Et tu n'as pas fini...
« Pythagore » approche ☺ !

T-155 **<u>(Forme contraposée du « théorème de Thalès »)</u>** :

soient cinq points distincts, A, B, C, D et E, tels que (BD) et (CE) soient sécantes en A.
Si l'un des rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$ ou $\frac{DE}{BC}$ n'est pas égal à l'un des deux rapports restant, alors (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

Démonstration :

c'est presque une évidence, n'est-ce pas ? Si (BC) et (DE) était parallèles, alors, **d'après T-154**, ces trois rapports seraient égaux !

T-156 **<u>(*Souvent appelé - abusivement - réciproque du* « théorème de Thalès »)</u>** :

soient cinq points distincts, A, B, C,D et E, tels que (BD) et (CE) soient sécantes en A.

Si A est à la fois un point de [BD] et un point de [CE], ou s'il n'est ni un point de l'un ni un point de l'autre, (tu liras souvent : « si A, B, D sont dans le même ordre que A, C, E »... Mais qu'est-ce qu'un ordre entre points de droites sécantes ?)
et si les rapports $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$ sont égaux, alors (BC) et (DE) sont parallèles.

Démonstration :

D'une part, j'appelle F le point commun à (AC) et à la parallèle à (BC) passant par D : **d'après M-8**, cette droite existe, et **d'après T-5**, elle coupe (AC).

D'après T-154, $\frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}$, donc $AF=\frac{AD}{AB}\times AC$ ... Et il est apparu, dans la démonstration de T-154, que A ne pouvait pas appartenir à [BD] ou à [CF] et ne pas appartenir à l'autre segment !

D'autre part, **d'après l'énoncé**, E est tel que $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$, donc tel que $AE=\frac{AD}{AB}\times AC$... Et A ne peut toujours pas appartenir à [BD] ou à [CE] et ne pas appartenir à l'autre segment !

AF = AE, donc F et E sont ou bien deux points distincts de (AC), de part et d'autre de A... Ou bien deux noms différents d'un même point.

Mais si F et E étaient de part et d'autre de A, ce point A, s'il appartenait à [CE], n'appartiendrait pas à [CF]... Et s'il n'appartenait pas à [CE], appartiendrait à [CF] : il ne pourrait pas appartenir simultanément aux deux segments.
L'un des points E ou F ne permettrait donc pas à A de se trouver dans la même position, ou par rapport à [CE], ou par rapport à [CF], que par rapport à [BD] : mais cette situation est incompatible ou avec l'énoncé, ou avec T-154...

Donc F et E sont deux noms différents d'un même point : (BC) et (DE) sont donc bien parallèles !

Pourquoi T-156 n'est-il pas le théorème réciproque du « théorème de Thalès » ? Bon, là, je te renvoie au site ***mathemagique.com*** (partie « logique ») ! Et même, mais vraiment parce que c'est toi, je vais t'écrire ce que serait la réciproque du « théorème de Thalès »... Et te prouver que ce n'est pas un théorème !

***Affirmation* réciproque du « théorème de Thalès »** :

soient cinq points distincts, A, B, C, D et E, tels que (BD) et (CE) soient sécantes en A :
si les rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$ *et* $\frac{DE}{BC}$ *sont égaux, alors (BC) et (DE) sont parallèles.*

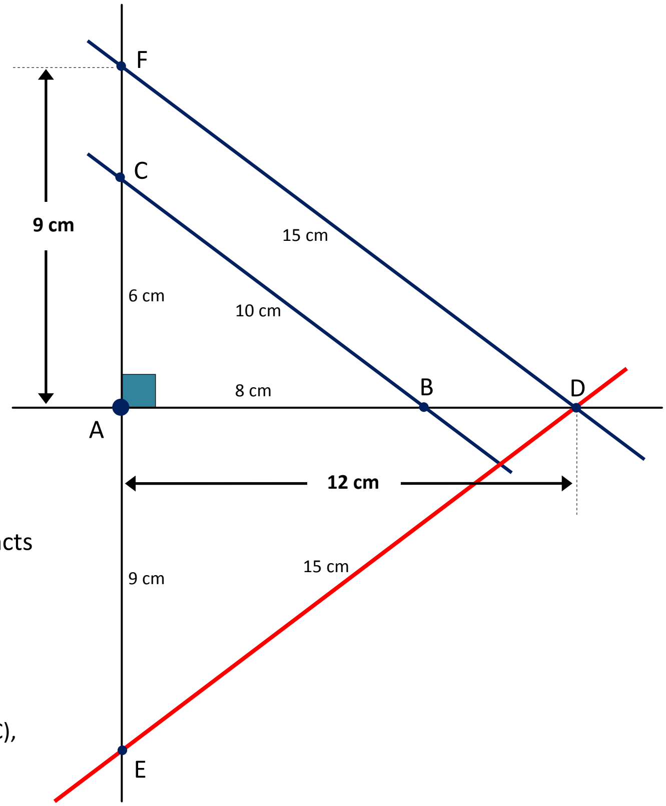
Cette affirmation est fausse !

Observe la configuration de la page suivante :

(Dans cette construction,
si ABC est rectangle en A et si [AB] mesure 8 cm et [AC] 6 cm, alors [BC] mesure bien 10 cm...
Et si ADF est rectangle en A et si [AD] mesure 12 cm et [AF] 9 cm, alors [DF] mesure bien 15 cm :
Je te le démontrerai dans trois pages - patience, patience !)

F est le point commun à (AC) et à
la parallèle à (BC) passant par D :
tu détermines AF par T-154.

E est l'image de F
dans la symétrie d'axe (AD) :
comme ADE est, **d'après M-15**,
isométrique à ADF, DE = DF !



$\dfrac{AD}{AB} = 1{,}5$, $\dfrac{AE}{AC} = 1{,}5$, $\dfrac{DE}{BC} = 1{,}5$

et A, B, C,D et E, sont bien cinq points distincts tels que (BD) et (CE) soient sécantes en A

... Et pourtant,

(BC) et (DE) ne sont pas parallèles !

(Sinon, comme (DF) est parallèle à (BC), il passerait par D deux parallèles distinctes à (BC), ce que **M-8 interdit** !)

Voilà pour le premier des deux grands « théorèmes grecs » de la géométrie du collège. Le temps de quelques définitions, d'un mini-théorème, et le deuxième grand va faire son entrée !

En parcourant le clade des triangles :

les définitions et les théorèmes des pages précédentes s'appliquent à tous les triangles... Mais certains triangles sont plus remarquables que d'autres (George Orwell aurait dit « certains triangles sont plus égaux que d'autres » ! ☺).

Tu les connais certainement déjà, mais je vais tout de même t'en écrire les définitions. Ensuite, nous verrons ce que leurs particularités leur apportent de plus (encore quelques définitions et quelques théorèmes !) :

D-135 ***Triangle rectangle*** **:** triangle dont (les supports de) deux côtés sont perpendiculaires.

« ABC est un triangle rectangle en A » signifie que l'angle droit de ce triangle est l'angle de sommet A.

(Oui, je me le rappelle : j'avais anticipé cette définition dans le chapitre précédent. La voici maintenant à sa place officielle !)

D-136 ***Triangle isocèle*** **:** triangle dont deux côtés ont la même longueur.