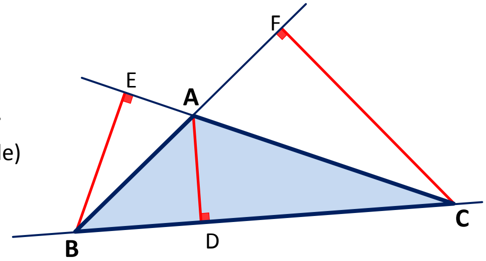
Hauteurs d'un triangle :

En commençant par une définition qui manque vraiment de simplicité :

D-134 ***Hauteur (d'un triangle)*** **:** un mot ambigu - comme l'était l'expression « hauteur d'un trapèze ».

Une *hauteur* d'un triangle est une ligne :
un segment joignant l'un des sommets du triangle
au pied de la perpendiculaire
au (support du) côté opposé, passant par ce sommet.
(à chaque triangle correspondent 3 hauteurs de ce triangle)



Une hauteur de ABC est [AD] :
elle est « issue de A », et « associée à [BC] ».
Les deux autres hauteurs de ABC sont :
[BE], « issue de B » et « associée à [AC] » … Et [CF], « issue de C » et « associée à [AB] » !

Ou - *mais c'est un abus de langage* : le support de ce segment (donc une droite !)

La *hauteur* d'un triangle, sans précision supplémentaire, ne te permet en général pas d'identification !

Tu dois préciser : « la hauteur issue de A » (là, il s'agira encore vraisemblablement du segment) ;
ou **:** « la hauteur associée à [BC] »… Et là, il s'agira souvent de la distance entre A et (BC), donc de la longueur de [AD].

Pourquoi « *La hauteur* de ABC », sans précision supplémentaire, n'est-elle pas une expression satisfaisante ? Parce que si je te demande de dessiner en rouge la hauteur de ABC, tu me répondras (en tout cas, je l'espère) : « laquelle ? »... Et si je t'affirme que la hauteur de ABC est de 5 cm, ça n'aura de sens que si ABC est un triangle équilatéral (mais là, j'anticipe encore un tout petit peu !).

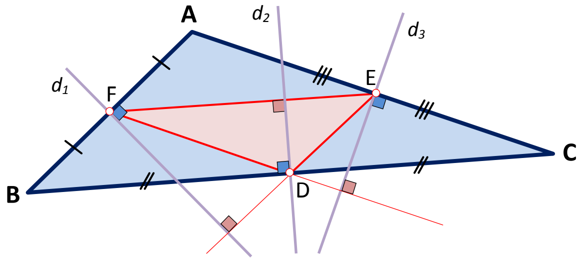
Et maintenant ? Les médianes d'un triangle sont concourantes, les médiatrices (des côtés) d'un triangle sont concourantes, les bissectrices (des angles) d'un triangle sont concourantes... Alors ?

Gagné ! Les (droites-support des) hauteurs d'un triangle sont concourantes ! Et la démonstration en est surprenante, parce qu'elle met en lumière un lien très simple entre les médiatrices des côtés d'un triangle et les hauteurs de son triangle médian.

T-148 Les médiatrices des côtés d'un triangle sont les (support des) hauteurs de son triangle médian.

Démonstration :

soit un triangle ABC.
J'appelle D le milieu de [BC],
E celui de [AC] et F celui de [AB].
J'appelle d_1 la médiatrice de [AB],
d_2 celle de [BC], d_3 celle de [CA].



Pourquoi d_2 est-elle (le support de) la hauteur de DEF issu de D ?

(FE) passe par les milieux de [AB] et de [AC], donc, **d'après T-138**, (BC) est parallèle à (FE). Mais **d'après D-86 (et T-76)**, d_2 est perpendiculaire à (BC), donc, **d'après T-40**, d_2 est perpendiculaire à (FE). Et **d'après D-86**, d_2 passe par D : alors, **d'après D-134**, d_2 est bien (le support de) la hauteur de DEF issue de D !

Et tu démontres de la même façon que d_1 est (le support de) la hauteur de DEF issue de F, et que d_3 est (le support de) la hauteur de DEF issue de E ! Amusant, non ?

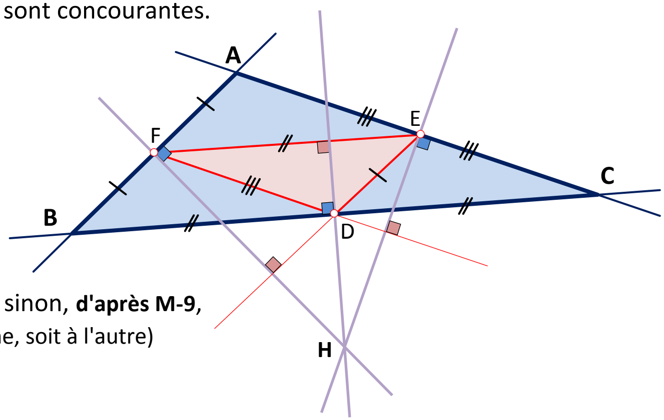
Mais en quoi, amusant ou non, T-148 va-t-il nous servir ? Regarde :

T-149 Les (droites-support des) hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Démonstration :

soit un triangle DEF.

J'appelle A le point commun
à la parallèle à (DE) passant par F
et à la parallèle à (DF) passant par E :
d'après M-8, ces deux droites existent,
et elles ne peuvent pas être parallèles, sinon, **d'après M-9**,
(DE) et (DF) (qui sont parallèles soit à l'une, soit à l'autre)
seraient également parallèles !



H est à la fois le point de concours des médiatrices des côtés de ABC et le point de concours des supports des hauteurs de DEF !

Sur le même modèle,
j'appelle B le point commun
à la parallèle à (EF) passant par D et à (AF),
puis C le point commun à (BD) et (AE).

(FB) est parallèle à (ED) et (BD) est parallèle à (FE), donc, **d'après D-120**, FBDE est un parallélogramme, et **d'après T-105**, BD = FE.
(FD) est parallèle à (EC) et (DC) est parallèle à (FE), donc, **d'après D-120**, FDCE est un parallélogramme, et **d'après T-105**, DC = FE.
D est donc le milieu de [BC].

Tu démontres de la même façon que E est le milieu de [AC] et que F est celui de [AB], donc que, **d'après D-128**, DEF est le triangle médian de ABC : alors, **d'après T-148**, les médiatrices des côtés de ABC sont les supports des hauteurs de DEF…

Mais, **d'après T-143**, les médiatrices des côtés de ABC sont concourantes, donc les supports des hauteurs de DEF le sont !

Merci, j'apprécie ☺ !
Tu crois que vous allez finir
par aimer la géométrie ?