L'enseignement de la géométrie Gustave CHOQUET 1964

Axiomatique de la géométrie non-euclidienne

Je ne pense pas qu'il soit bon de discuter avec les élèves des modifications que l'on peut faire subir au système d'axiomes qu'on leur présente, avant qu'ils n'aient déjà bien assimilé celui-ci, et n'aient acquis une certaine maturité d'esprit. La géométrie euclidienne possède d'ailleurs une telle simplicité, et sa structure contient en germe tant de notions fondamentales, notion de groupe, vecteur, produit scalaire, que son étude ne doit pas souffrir d'une concurrence avec d'autres géométries.

Par contre, à la fin des études secondaires ou au début de l'université, lorsque l'élève dispose déjà d'outils algébriques suffisants, il est fort intéressant de lui faire étudier sur des modèles quelques géométries non-euclidiennes, et de lui montrer que quelques modifications des axiomes du plan et de l'espace euclidiens fournissent les axiomes de ces géométries.

Appendice 2

Avertissement

Ce livre a été écrit pour les professeurs de mathématiques de l'enseignement du second degré, pour ceux qui se préparent à l'être et pour tous ceux qui aiment la géométrie. Il pourra aussi être utilisé avec profit par les élèves de 15 à 18 ans sous la direction de leurs maîtres.

Euclide basait la géométrie plane sur les cas d'égalité des triangles. Vingt-trois siècles plus tard les mathématiciens définissent le plan comme un espace affine à deux dimensions muni d'un produit scalaire. J'ai pensé que nos enfants avaient besoin d'un exposé de la géométrie qui parte, comme chez Euclide, de notions tirées du monde sensible, mais qui leur permette d'utiliser très vite tes outils souples et féconds de l'algèbre.
Ce livre présente donc une axiomatique de la géométrie basée sur les notions de parallèle, de perpendiculaire et de distance, mais sous une forme qui conduit de façon naturelle et rapide à la structure algébrique du plan et de l'espace.
Plusieurs chapitres sont ensuite consacrés à la clarification de questions considérées souvent comme épineuses; les déplacements, les angles et la mesure des angles, l'orientation.
Ce livre doit beaucoup à des discussions avec de nombreux mathématiciens et enseignants, français ou étrangers. Je remercie tout particulièrement M. André Révuz dont les critiques et suggestions m'ont été fort utiles.

Gustave CHOQUET

Introduction

Je ne discuterai pas ici de la nécessité d'un enseignement de la géométrie; j'étudierai seulement la façon dont il peut être fait.
Il y a maintenant un accord assez unanime, dans tous les pays, sur les deux principes suivants :
1) Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif.
Ce doit être un enseignement basé sur l'observation; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.

2) Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace), est de le définir comme espace vectoriel sur R, à deux (ou trois) dimensions, muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique *u.v* telle que *u.u* > 0 pour tout vecteur $u \neq 0$.
C'est aussi la définition qui se prête le mieux à des généralisations fécondes (espaces R^n, C^n , espace de Hilbert, etc.).

De nombreux professeurs de l'enseignement du second degré témoignent, par leur expérience, que cette définition peut être déjà utilisée avec grand profit par des élèves de 17 ans (classe terminale des lycées) ayant étudié antérieurement le produit scalaire. Cette méthode permet dans cette classe une économie de pensée considérable, et conduit tout naturellement à des démonstrations basées sur de véritables méthodes. Elle apporte en même temps au professeur de physique une aide précieuse, puisqu'elle lui permet de définir et d'étudier enfin correctement les notions de travail, de barycentre, de résultante de forces.

Le problème est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif. On va donc faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif, en prenant soin de lui faire toujours préciser ses prémisses.

Il est donc indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète. Diverses expériences ont d'ailleurs montré le goût que manifestent certains enfants, pour une axiomatique précise; pour ceux-ci les mathématiques apparaissent comme un jeu aux règles strictes, et ils ont une grande joie à jouer correctement ce jeu. Il nous faut donc trouver une axiomatique simple, aux axiomes forts, c'est-à-dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et intuitifs, c'est-à-dire traduisant des propriétés de l'espace qui nous entoure faciles à vérifier.

Peu importe qu'ils ne soient pas indépendants; mais je ne pense pas qu'il soit désirable, comme l'ont préconisé certains professeurs, de prendre au départ de très nombreux axiomes : le jeu mathématique basé sur trop de règles, devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude…